

На правах рукописи



**ГРИШИНА Елена Евгеньевна**

**МЕТОД НЕЛИНЕЙНОГО ОБЪЕМНОГО СИНГУЛЯРНОГО  
ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ  
РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ  
ЭФФЕКТИВНОЙ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ  
ПРОНИЦАЕМОСТИ ТЕЛА В ВОЛНОВОДЕ**

**Специальность 05.13.18 – Математическое моделирование,  
численные методы и комплексы программ**

**Автореферат  
диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук**

**КАЗАНЬ – 2013**

Работа выполнена на кафедре математики и суперкомпьютерного моделирования в ФГБОУ ВПО «Пензенский государственный университет».

**Научный руководитель:** доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математики и суперкомпьютерного моделирования ФГБОУ ВПО «Пензенский государственный университет»  
**Смирнов Юрий Геннадьевич**

**Официальные оппоненты:** **Ильинский Анатолий Серафимович**, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической физики, заведующий лабораторией вычислительной электродинамики ФГБОУ ВПО «Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова»;

**Плещинский Николай Борисович**, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики ФГАОУ ВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет»

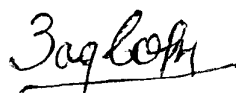
**Ведущее предприятие –** ФГБОУ ВПО «Московский государственный технический университет радиотехники, электроники и автоматики»

Защита диссертации состоится 25 апреля 2013 г., в 14 часов 30 минут, на заседании диссертационного совета Д 212.081.21 при ФГАОУ ВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет» по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, 18, корпус 2, ауд. 218.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. Н. И. Лобачевского ФГАОУ ВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет».

Автореферат разослан «\_\_\_» марта 2013 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета  
доктор физико-математических наук,  
профессор

 Задворнов О. А.

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Диссертационная работа посвящена решению обратной задачи определения эффективной диэлектрической проницаемости тела произвольной геометрической формы, расположенного в прямоугольном волноводе.

**Актуальность темы.** Восстановление электрофизических параметров образцов композитных материалов (в частности, наноматериалов и метаматериалов) с различной геометрией представляет собой весьма актуальную задачу нанoeлектроники и нанотехнологии. В настоящее время существуют различные подходы к решению задачи восстановления магнитных и диэлектрических параметров наноматериалов. Один из возможных вариантов определения данных параметров – экспериментальные измерения. Но вследствие композитного характера материалов применение данного способа к решению рассматриваемой задачи является затруднительным. Поэтому актуален другой путь поиска параметров наноматериалов. Он состоит в применении математического моделирования и решении задач численно, с помощью компьютеров. Несмотря на все многообразие исследований в данной области (см. работы А. Б. Самохина, Е. Е. Тыртышников, А. С. Ильинского, Ю. В. Шестопалова), не был достаточно широко рассмотрен метод нелинейного объемного интегро-дифференциального уравнения для решения обратной задачи определения эффективной диэлектрической проницаемости тела в волноводе, идея которого была предложена впервые Ю. Г. Смирновым.

**Цели диссертационной работы.** Целями диссертационной работы являются:

- 1) корректная постановка обратной краевой задачи определения эффективной диэлектрической проницаемости тела в волноводе по (измеренным) коэффициентам прохождения или отражения;
- 2) разработка численного метода нахождения эффективной диэлектрической проницаемости по коэффициенту прохождения или отражения;
- 3) программная реализация численного метода, его тестирование и проведение расчетов для конкретных образцов материалов.

**Научная новизна.** Для решения обратной задачи применен метод нелинейного объемного сингулярного интегро-дифференциального уравнения.

Разработан итерационный метод определения эффективной диэлектрической проницаемости тела произвольной геометрической формы, расположенного в волноводе.

Разработан комплекс программ на языке Си для решения поставленной задачи, получены результаты для тел сложной геометрической формы с использованием коэффициента прохождения и отражения.

Изучены особенности решения поставленной задачи на мини-кластерах.

**Практическая значимость работы.** Результаты диссертационной работы могут быть применены в нанoeлектронике, оптике и электронике СВЧ. Одно из возможных применений результаты данной работы могут находить при исследовании параметров радиопоглощаемых материалов,

используемых как в системах, обеспечивающих электромагнитную совместимость современных радиоэлектронных устройств, так и в системах типа «stealth», уменьшающих коэффициент отражения электромагнитного излучения СВЧ-диапазона от зондируемых объектов.

Также изученные особенности поиска коэффициентов матрицы, используемой для определения эффективной диэлектрической проницаемости, позволяют эффективно решать задачу на мини-кластерах.

**Реализация и внедрение полученных результатов.** Результаты, полученные в диссертации, включены в отчет по НИР, выполненной на кафедре математики и суперкомпьютерного моделирования Пензенского государственного университета: проект «Разработка методов суперкомпьютерного моделирования и GRID-технологий для определения эффективной диэлектрической и магнитной проницаемости нанокompозитных материалов и наноструктур различной геометрической формы» аналитической ведомственной целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2011 годы)».

**Апробация работы.** Основные результаты работы докладывались и обсуждались на научных конференциях и семинарах:

- Международной конференции «Days On Diffraction – 2012» (Россия, Санкт-Петербург, 2012);
- Международной конференции «32<sup>nd</sup> Progress in Electromagnetic Research Symposium (PIERS)» (Россия, Москва, 2012);
- Международной научно-технической конференции «Новые информационные технологии и системы» (Россия, Пенза, 2010);
- Международном симпозиуме «Надежность и качество – 2011» (Россия, Пенза, 2011);
- Международной научно-методической конференции «Университетское образование» (Россия, Пенза, 2011);
- V Международной научно-технической конференции молодых специалистов, аспирантов и студентов «Математическое и компьютерное моделирование естественнонаучных и социальных проблем» (Россия, Пенза, 2011);
- XI Международной научно-технической конференции «Проблемы информатики в образовании, управлении, экономике и технике» (Россия, Пенза, 2011).

**Публикации.** По материалам диссертации опубликовано 12 печатных работ, из них 4 работы – в журналах из списка, рекомендованного ВАК РФ.

**Структура и объем диссертации.** Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения, приложения и списка использованных источников, включающего 72 наименования. Объем диссертационной работы составляет 111 страниц, работа содержит 32 рисунка и 23 таблицы.

## СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** приведен обзор работ по теме диссертации и вопросам, примыкающим к ней; обоснована актуальность темы, сформулированы цели работы, изложены основные задачи и дано краткое содержание.

В **первой главе** приведена постановка прямой задачи дифракции на теле произвольной формы. Затем сформулированы постановка обратной задачи определения эффективной диэлектрической проницаемости тела в волноводе по коэффициенту отражения, а также постановка обратной задачи определения эффективной диэлектрической проницаемости тела в волноводе по коэффициенту прохождения.

Рассмотрим прямую задачу дифракции.

Пусть объемное тело  $Q$  расположено в прямоугольном волноводе  $P = \{x: 0 < x_1 < a, 0 < x_2 < b, -\infty < x_3 < \infty\}$ . Поверхность волновода  $\partial P$  идеально проводящая. Данное тело характеризуется постоянной магнитной проницаемостью  $\mu_0$  и диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ .

Предполагается, что граница  $\partial Q$  области  $Q$  является кусочно-гладкой.

Прямая задача дифракции формулируется следующим образом. Необходимо найти электромагнитное (полное) поле  $\mathbf{E}, \mathbf{H} \in L_2(Q)$ . Данное поле возбуждается сторонним полем с временной зависимостью вида  $e^{-i\omega t}$ ,  $\omega > 0$  – круговая частота.

Рассмотрим (обобщенные) решения системы уравнений Максвелла:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= -i\omega \epsilon \mathbf{E}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= i\omega \mu_0 \mathbf{H}, \quad x \in R^3. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Такие решения подчиняются следующим условиям на бесконечности. Пусть  $|x_3| > C$  для достаточно больших  $C > 0$ . Тогда поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathbf{E}^0 \\ \mathbf{H}^0 \end{pmatrix} + \sum_p R_p^{(\pm)} e^{i\gamma_p^{(1)} |x_3|} \begin{pmatrix} \lambda_p^{(1)} \Pi_p e_3 - i\gamma_p^{(1)} \nabla_2 \Pi_p \\ -i\omega \epsilon_0 (\nabla_2 \Pi_p) \times e_3 \end{pmatrix} + \\ &+ \sum_p Q_p^{(\pm)} e^{i\gamma_p^{(2)} |x_3|} \begin{pmatrix} i\omega \mu_0 (\nabla_2 \Psi_p) \times e_3 \\ \lambda_p^{(2)} \Psi_p e_3 - i\gamma_p^{(2)} \nabla_2 \Psi_p \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь «+» соответствует  $+\infty$ , «-» соответствует  $-\infty$ . В формуле (1.2)  $\gamma_p^{(j)} = \sqrt{k_0^2 - \lambda_p^{(j)}}$ ,  $\operatorname{Im} \gamma_p^{(j)} > 0$  или  $\operatorname{Im} \gamma_p^{(j)} = 0$ ,  $k\gamma_p^{(j)} \geq 0$  и  $\lambda_p^{(1)}$ ,  $\Pi_p(x_1, x_2)$  и  $\lambda_p^{(2)}$ ,  $\Psi_p(x_1, x_2)$  – полная система собственных значений и ортонормированных в  $L_2(\Pi)$  собственных функций двумерного оператора Лапласа  $-\Delta$

в прямоугольнике  $\Pi := \{(x_1, x_2) : 0 < x_1 < a, 0 < x_2 < b\}$  с условиями Дирихле и Неймана соответственно и  $\nabla_2 \equiv e_1 \partial/\partial x_1 + e_2 \partial/\partial x_2$ .

Верны следующие оценки для коэффициентов разложений (1.2):

$$R_p^{(\pm)}, Q_p^{(\pm)} = O(p^m), p \rightarrow \infty, \quad (1.3)$$

для некоторого  $m \in \mathbb{N}$ .

На стенках волновода для  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  должны выполняться краевые условия

$$\mathbf{E}_\tau|_{\partial P} = 0, \mathbf{H}_\nu|_{\partial P} = 0. \quad (1.4)$$

Предположим, что  $\mathbf{E}^0$  и  $\mathbf{H}^0$  являются решениями описанной выше краевой задачи в отсутствие тела  $Q$ :

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H}^0 &= -i\omega\epsilon_0 \mathbf{E}^0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E}^0 &= i\omega\mu_0 \mathbf{H}^0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

с краевыми условиями

$$\mathbf{E}_\tau^0|_{\partial P} = 0, \mathbf{H}_\nu^0|_{\partial P} = 0. \quad (1.6)$$

Тензор Грина  $\hat{G}_E$  имеет вид

$$\hat{G}_E = \begin{pmatrix} G_E^1 & 0 & 0 \\ 0 & G_E^2 & 0 \\ 0 & 0 & G_E^3 \end{pmatrix}, \quad (1.7)$$

где

$$G_E^1 = \frac{2}{ab} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\gamma_{nm}|x_3-y_3|}}{\gamma_{nm}(1+\delta_{0n})} \cos \frac{\pi n}{a} x_1 \sin \frac{\pi m}{b} x_2 \cos \frac{\pi n}{a} y_1 \sin \frac{\pi m}{b} y_2, \quad (1.8)$$

$$G_E^2 = \frac{2}{ab} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{-\gamma_{nm}|x_3-y_3|}}{\gamma_{nm}(1+\delta_{0m})} \sin \frac{\pi n}{a} x_1 \cos \frac{\pi m}{b} x_2 \sin \frac{\pi n}{a} y_1 \cos \frac{\pi m}{b} y_2, \quad (1.9)$$

$$G_E^3 = \frac{2}{ab} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\gamma_{nm}|x_3-y_3|}}{\gamma_{nm}} \sin \frac{\pi n}{a} x_1 \sin \frac{\pi m}{b} x_2 \sin \frac{\pi n}{a} y_1 \sin \frac{\pi m}{b} y_2. \quad (1.10)$$

Компоненты (1.8)–(1.10) представляют собой фундаментальные решения уравнения Гельмгольца в  $P$  с коэффициентом  $k_0^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0$ . Для них выполняются краевые условия первого или второго рода на  $\partial P$ , которые обеспечивают обращение в нуль тангенциальных составляющих напряженности электрического поля на стенках волновода.

В выражениях (1.8)–(1.10)

$$\gamma_{nm} = \sqrt{\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2 - k_0^2}. \quad (1.11)$$

Ветвь квадратного корня выбирается таким образом, чтобы было верно  $\text{Im } \gamma_{nm} \geq 0$ .

Компоненты тензора Грина  $G_E^m$  могут быть записаны с выделенной особенностью при  $x = y$ :

$$G_E^m = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik_0|x-y|}}{|x-y|} + g^m(x, y), \quad x, y \in P, \quad (1.12)$$

где функция  $g^m \in C^\infty(\bar{Q} \times \bar{P})$ . В силу симметрии функций Грина  $G_E^m(x, y) = G_E^m(y, x)$ , ( $m = 1, 2, 3$ ) тензор Грина  $\hat{G}_E$  может быть представлен в виде

$$\hat{G}_E = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik_0|x-y|}}{|x-y|} \hat{I} + \hat{g}(x, y), \quad x, y \in P, \quad (1.13)$$

где матрица-функция (тензор)  $\hat{g} \in C^\infty(\bar{Q} \times \bar{P})$  и  $\hat{g} \in C^\infty(\bar{P} \times \bar{Q})$ .

Предположим, что существуют и единственны решения краевых задач (1.1)–(1.4), (1.5), (1.6). Рассмотрим систему уравнений (1.1). Она может быть записана в форме

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{H}^P &= -i\omega\epsilon_0 \mathbf{E}^P + \mathbf{J}^P, \\ \text{rot } \mathbf{E}^P &= i\omega\mu_0 \mathbf{H}^P. \end{aligned} \quad (1.14)$$

При этом

$$\mathbf{J}^P = -i\omega(\epsilon - \epsilon_0) \mathbf{E} \quad (1.15)$$

является электрическим током поляризации.

Решение краевой задачи (1.14) может быть представлено в виде

$$\mathbf{E} = i\omega\mu_0 \mathbf{A}_E - \frac{1}{i\omega\epsilon_0} \text{grad } \text{div } \mathbf{A}_E, \quad \mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}_E, \quad (1.16)$$

где

$$\mathbf{A}_E = \int_P \hat{G}_E(r) \mathbf{J}^P(y) dy - \quad (1.17)$$

векторный потенциал электрического тока.

Для  $\mathbf{A}_E$  верно

$$\Delta \mathbf{A}_E + k_0^2 \mathbf{A}_E = -\mathbf{J}^P. \quad (1.18)$$

Формулы (1.16), (1.17) задают неявные соотношения для решения задачи (1.14), так как ток  $\mathbf{J}^P$  зависит от  $\mathbf{E}$ . Опуская точку на тело, переходим к следующему представлению электромагнитного поля:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^P(x) = & i\omega\mu_0 \int_Q \left( -i\omega(\varepsilon - \varepsilon_0) \hat{G}_E \mathbf{A}(y) \right) dy + \\ & + \frac{1}{i\omega\varepsilon_0} \text{grad div} \int_Q \left( -i\omega(\varepsilon - \varepsilon_0) \hat{G}_E \mathbf{A}(y) \right) dy, \quad x \in Q \end{aligned}$$

и после несложных преобразований получаем:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x) = & \mathbf{E}^0(x) + k_0^2 \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - 1 \right) \int_Q \hat{G}_E(r) \mathbf{E}(y) dy + \\ & + \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - 1 \right) \text{grad div} \int_Q \hat{G}_E(r) \mathbf{E}(y) dy, \quad x \in Q. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x) = & \mathbf{E}^0(x) + k_0^2 \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - 1 \right) \int_Q \hat{G}_E(r) \mathbf{E}(y) dy + \\ & + \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - 1 \right) \text{grad div} \int_Q \hat{G}_E(r) \mathbf{E}(y) dy, \quad x \in P \setminus Q. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Будем рассматривать обратную краевую задачу для определения эффективной диэлектрической проницаемости образца наноматериала, расположенного в волноводе, по коэффициенту отражения. Рассмотрим изотропный случай и будем считать, что  $\varepsilon$  – неизвестная константа (эффективная диэлектрическая проницаемость) образца. Предположим, что  $\pi/a < k_0 < \pi/b$ . В этом случае в волноводе может распространяться только одна мода, потому что  $\text{Im} \gamma_1^{(2)} = 0$ ,  $\gamma_1^{(2)} = \sqrt{k_0^2 - \pi^2/a^2} > 0$  и  $\text{Im} \gamma_p^{(j)} > 0$  для всех  $p, j$  за исключением  $p=1$  и  $j=2$ . Мы также предполагаем, что

$$\mathbf{E}^0(x) = e_2 A^{(+)} i\omega\mu_0 \frac{\pi}{a} \sin \frac{\pi x_1}{a} e^{-i\gamma_1^{(2)} x_3}. \quad (1.21)$$

Здесь  $A^{(+)}$  – (известная) амплитуда распространяющейся волны. Вычислив предел при  $x_3 \rightarrow -\infty$  в (1.20), получим уравнение

$$\mathbf{E}(x) = \mathbf{E}^0(x) + k_0^2 \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - 1 \right) \int_Q G_E^2(r) (\mathbf{E}(y) \cdot e_2) dy, \quad x \in P \setminus Q, \quad (1.22)$$

и, принимая во внимание условие на бесконечности (1.2) при  $x_3 \rightarrow -\infty$ :



$$\begin{aligned}
& e_2 A^{(+)} e^{-i\gamma_1^{(2)} x_3} i\omega\mu_0 \frac{\pi}{a} \sin \frac{\pi x_1}{a} + e_2 Q_1^{(-)} e^{i\gamma_1^{(2)} x_3} i\omega\mu_0 \frac{\pi}{a} \sin \frac{\pi x_1}{a} = \\
& = e_2 A^{(+)} e^{-i\gamma_1^{(2)} x_3} i\omega\mu_0 \frac{\pi}{a} \sin \frac{\pi x_1}{a} + \\
& + \frac{k_0^2 e_2}{ab\gamma_{10}} \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - 1 \right) \int_Q \sin \frac{\pi x_1}{a} \sin \frac{\pi y_1}{a} e^{i\gamma_1^{(2)} (x_3 - y_3)} (\mathbf{E}(y) \cdot \mathbf{e}_2) dy. \quad (1.23)
\end{aligned}$$

Из этого следует асимптотическое уравнение

$$Q_1^{(-)} = k_0^2 \frac{1}{b\gamma_{10} i\pi\omega\mu_0} \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - 1 \right) \int_Q \sin \frac{\pi y_1}{a} e^{-i\gamma_1^{(2)} y_3} (\mathbf{E}(y) \cdot \mathbf{e}_2) dy. \quad (1.24)$$

Мы предполагаем, что коэффициент  $Q_1^{(-)}$  известен из эксперимента. Уравнение (1.24) – это дополнительное условие, из которого будет определяться диэлектрическая проницаемость материала. Коэффициент  $Q_1^{(-)}$  зависит от круговой частоты  $\omega$ .

Обратная задача определения эффективной диэлектрической проницаемости образца материала, помещенного в волновод, по коэффициенту отражения состоит в том, чтобы найти проницаемость по известному коэффициенту  $Q_1^{(-)} = Q_1^{(-)}(\omega)$  на различных частотах.

Далее будем рассматривать обратную краевую задачу для определения эффективной диэлектрической проницаемости образца наноматериала, расположенного в волноводе, по коэффициенту прохождения. Предположим, что  $\pi/a < k_0 < \pi/b$ . В этом случае в волноводе может распространяться только одна мода, потому что  $\text{Im } \gamma_1^{(2)} = 0$ ,  $\gamma_1^{(2)} = \sqrt{k_0^2 - \pi^2/a^2} > 0$  и  $\text{Im } \gamma_p^{(j)} > 0$  для всех  $p, j$  за исключением  $p=1$  и  $j=2$ . Мы также предполагаем, что

$$\mathbf{E}^0(x) = e_2 A^{(+)} i\omega\mu_0 \frac{\pi}{a} \sin \frac{\pi x_1}{a} e^{-i\gamma_1^{(2)} x_3}. \quad (1.25)$$

Здесь  $A^{(+)}$  – (известная) амплитуда распространяющейся волны.

Вычислив предел при  $x_3 \rightarrow +\infty$  в (1.20), получим уравнение

$$\mathbf{E}(x) = \mathbf{E}^0(x) + k_0^2 \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - 1 \right) \int_Q G_E^2(x, y) E_2(y) dy, \quad x \in P \setminus Q, \quad (1.26)$$

и, принимая во внимание условие на бесконечности (1.2) при  $x_3 \rightarrow +\infty$ :

$$e_2 Q_1^{(+)} e^{-i\gamma_1^{(2)} x_3} i\omega\mu_0 \frac{\pi}{a} \sin \frac{\pi x_1}{a} = e_2 A^{(+)} e^{-i\gamma_1^{(2)} x_3} i\omega\mu_0 \frac{\pi}{a} \sin \frac{\pi x_1}{a} + \\ + \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - 1 \right) \frac{k_0^2 e_2}{ab\gamma_{10}} \int_Q \sin \frac{\pi x_1}{a} \sin \frac{\pi y_1}{a} e^{-i\gamma_1^{(2)} (x_3 - y_3)} E_2(y) dy. \quad (1.27)$$

Из этого следует асимптотическое уравнение

$$Q_1^{(+)} = A^{(+)} + k_0^2 \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - 1 \right) \frac{1}{b\gamma_{10} i\pi\omega\mu_0} \int_Q \sin \frac{\pi y_1}{a} e^{i\gamma_1^{(2)} y_3} E_2(y) dy. \quad (1.28)$$

Мы предполагаем, что коэффициент  $Q_1^{(+)}$  известен из эксперимента. Уравнение (1.28) – это дополнительное условие, из которого будет определяться диэлектрическая проницаемость материала. Коэффициент  $Q_1^{(+)}$  зависит от круговой частоты  $\omega$ .

Обратная задача определения эффективной диэлектрической проницаемости образца материала, помещенного в волновод, по коэффициенту прохождения состоит в том, чтобы найти проницаемость по известному коэффициенту  $Q_1^{(+)} = Q_1^{(+)}(\omega)$  на различных частотах.

Во **второй главе** доказана теорема о существовании и единственности решения нелинейного объемного интегро-дифференциального уравнения и обратной задачи определения эффективной диэлектрической проницаемости по коэффициенту отражения. Приведено доказательство теоремы о существовании и единственности решения нелинейного объемного интегро-дифференциального уравнения и обратной задачи определения эффективной диэлектрической проницаемости по коэффициенту прохождения. Построенный в данной главе итерационный процесс позволяет рассчитать приближенное решение интегро-дифференциального уравнения.

Принимая во внимание (1.24), мы имеем:

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - 1 = \frac{C}{(\mathbf{E}, \mathbf{f})}, \quad (2.1)$$

где

$$C = \frac{i\pi\omega\mu_0 b\gamma_{10} Q_1^{(-)}}{k_0^2}, \quad (2.2)$$

$$\mathbf{f} = e_2 \sin \frac{\pi y_1}{a} e^{i\gamma_1^{(2)} y_3}, \quad (2.3)$$

а скобки обозначают скалярное произведение в пространстве  $L_2(Q)$ :

$$(\mathbf{E}, \mathbf{f}) = \int_Q \mathbf{E}(y) \overline{\mathbf{f}(y)} dy. \quad (2.4)$$

Подставляя (2.1) и (2.3) в формулу (1.19), мы получаем нелинейное объемное интегро-дифференциальное уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{(\mathbf{E}, \mathbf{f})}{C} (\mathbf{E}(x) - \mathbf{E}^0(x)) &= k_0^2 \int_Q \mathcal{G}_E(x, y) \mathbf{E}(y) dy + \\ &+ \text{grad div} \int_Q \mathcal{G}_E(x, y) \mathbf{E}(y) dy, \quad x \in Q. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Введем линейный интегральный оператор:

$$A_0 \mathbf{E} := k_0^2 \int_Q \mathcal{G}_E(x, y) \mathbf{E}(y) dy + \text{grad div} \int_Q \mathcal{G}_E(x, y) \mathbf{E}(y) dy. \quad (2.6)$$

Запишем уравнение (2.5) в операторной форме:

$$\frac{(\mathbf{E}, \mathbf{f})}{C} (\mathbf{E} - \mathbf{E}^0) = A_0 \mathbf{E}. \quad (2.7)$$

Обозначим:

$$r_* = \left( \frac{\|A_0 \bar{\mathbf{f}}\|^2}{\|A_0\|^2} + \frac{\|A_0 \mathbf{f}\| |(\bar{\mathbf{f}}, \mathbf{f})|}{\|A_0\| \|\mathbf{f}\|} \right)^{1/2} - \frac{\|A_0 \bar{\mathbf{f}}\|}{\|A_0\|}. \quad (2.8)$$

Пусть выполнено следующее условие:

$$|\mathcal{C}| < F \equiv |(\bar{\mathbf{f}}, \mathbf{f})| \frac{\left( 1 - \frac{2r_* \|\mathbf{f}\|}{|(\bar{\mathbf{f}}, \mathbf{f})|} \right)}{\|A_0\|}. \quad (2.9)$$

Тогда, применяя принцип сжимающих отображений, получаем теорему.

**Теорема 1.** Пусть выполнено условие (2.9). Тогда существует и единственно решение нелинейного объемного интегрального уравнения (2.5). Также существует и единственно решение обратной краевой задачи, полученное по формуле (2.1). Кроме того, приближенное решение уравнения (2.7) может быть найдено посредством итерационного процесса

$$\mathbf{E}_{n+1} = \mathbf{E}_n - \frac{1}{A_0^{(+)}(\bar{\mathbf{f}}, \mathbf{f})} \{ (\mathbf{E}_n, \mathbf{f}) (\mathbf{E}_n - \mathbf{E}^0) - C(A_0 \mathbf{E}_n) \}, \quad (2.10)$$

который сходится для любого начального приближения  $\mathbf{E}_0 \in \overline{S_{r_*}(\mathbf{E}^0)}$  со скоростью геометрической прогрессии, где  $r_*$  определяется формулой (2.8).

Далее рассмотрим решение обратной краевой задачи по коэффициенту прохождения.

Принимая во внимание (1.28), имеем:

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - 1 = \frac{C}{(\mathbf{E}, \mathbf{f})}. \quad (2.11)$$

Здесь

$$C = \frac{i\pi\omega\mu_0 b\gamma_{10} \left( Q_1^{(+)} - A^{(+)} \right)}{k_0^2}, \quad (2.12)$$

$$\mathbf{f} = e_2 \sin \frac{\pi y_1}{a} e^{-i\gamma_1^{(2)} y_3}. \quad (2.13)$$

Скобки обозначают скалярное произведение в пространстве  $L_2(Q)$ :

$$(\mathbf{E}, \mathbf{f}) = \int_Q \mathbf{E}(y) \overline{\mathbf{f}(y)} dy. \quad (2.14)$$

Подставляя (2.11) и (2.13) в формулу (1.19), мы получаем нелинейное объемное интегро-дифференциальное уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{(\mathbf{E}, \mathbf{f})}{C} (\mathbf{E}(x) - \mathbf{E}^0(x)) &= k_0^2 \int_Q \mathcal{G}_E(x, y) \mathbf{E}(y) dy + \\ &+ \text{grad div} \int_Q \mathcal{G}_E(x, y) \mathbf{E}(y) dy, \quad x \in Q. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Введем линейный интегральный оператор:

$$A_0 \mathbf{E} := k_0^2 \int_Q \mathcal{G}_E(x, y) \mathbf{E}(y) dy + \text{grad div} \int_Q \mathcal{G}_E(x, y) \mathbf{E}(y) dy. \quad (2.16)$$

Запишем уравнение (2.15) в операторной форме:

$$\frac{(\mathbf{E}, \mathbf{f})}{C} (\mathbf{E} - \mathbf{E}^0) = A_0 \mathbf{E}. \quad (2.17)$$

Обозначим:

$$r_* = \left( \frac{\|A_0 \mathbf{f}\|^2}{\|A_0\|^2} + \frac{\|A_0 \mathbf{f}\| \|\mathbf{f}\|}{\|A_0\|} \right)^{1/2} - \frac{\|A_0 \mathbf{f}\|}{\|A_0\|}. \quad (2.18)$$

Пусть выполнено следующее условие:

$$|\mathcal{C}| < F \equiv \|\mathbf{f}\|^2 \frac{1 - \frac{2r_*}{\|\mathbf{f}\|}}{\|A_0\|}. \quad (2.19)$$

Тогда верна следующая теорема.

**Теорема 2.** В случае выполнения условия (2.19) существует и единственно решение нелинейного объемного интегрального уравнения (2.15). Также существует и единственно решение обратной краевой задачи, полученное по формуле (2.11). Кроме того, приближенное решение уравнения (2.17) может быть найдено посредством итерационного процесса

$$\mathbf{E}_{n+1} = \mathbf{E}_n - \frac{1}{\|\mathbf{f}\|^2} \{(\mathbf{E}_n, \mathbf{f})(\mathbf{E}_n - \mathbf{E}^0) - C(A_0 \mathbf{E}_n)\}, \quad (2.20)$$

который сходится для любого начального приближения  $\mathbf{E}_0 \in \overline{S_{r_*}(\mathbf{E}^0)}$  со скоростью геометрической прогрессии, где  $r_*$  определяется формулой (2.18).

Также во второй главе рассмотрено проектирование на конечные подпространства и построен вычислительный алгоритм для решения интегродифференциального уравнения.

В третьей главе представлены результаты расчета по коэффициенту отражения и прохождения для тел различной геометрической формы. Приведены результаты сравнения численного и аналитического решения. Также проведен анализ области сходимости метода, получены результаты для метаматериалов.

#### *Результаты расчета по коэффициенту отражения*

Ниже представлен результат расчета эффективной диэлектрической проницаемости образца материала в волноводе итерационным методом по коэффициенту отражения (рисунок 1). Образец материала представлял собой секцию волновода. Коэффициент отражения рассчитывался аналитически по точному значению  $\epsilon$ . Параметры волновода  $a = 2,274$ ,  $b = 1,004$ ,  $c = 0,982$ ; точное значение  $\epsilon = 1,5$ , построена вещественная часть значения  $\epsilon$ , вычисленного итерационным методом, для 50 итераций.

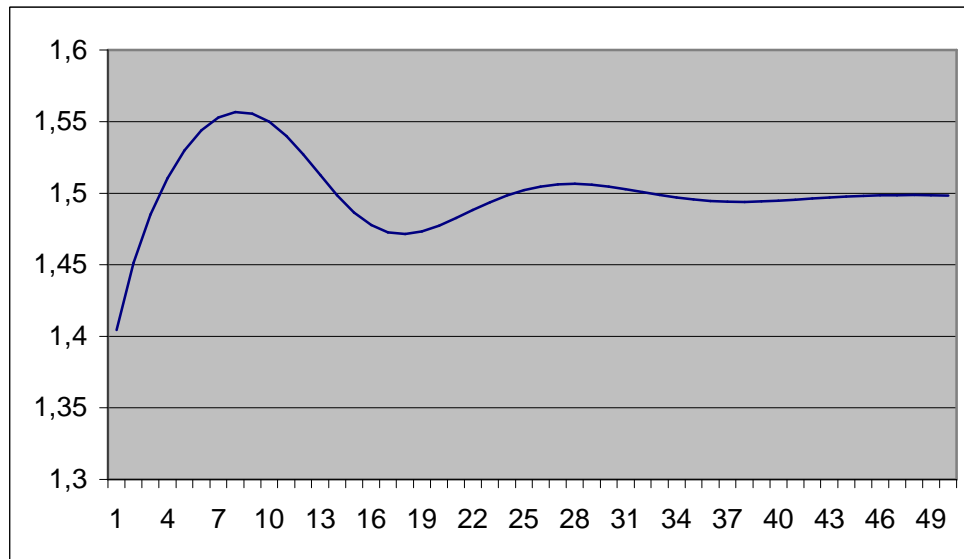


Рисунок 1 – Результаты расчета эффективной диэлектрической проницаемости по коэффициенту отражения

Полученные в работе результаты демонстрируют хорошую сходимость итерационного метода. Это подтверждают и результаты, приведенные в таблице 1, рассчитанные для тела, изображенного на рисунке 2.

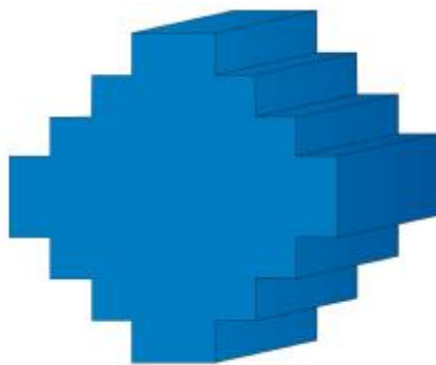


Рисунок 2 – Тело сложной геометрической формы

Таблица 1 – Точное и вычисленное значения эффективной диэлектрической проницаемости для тела сложной геометрической формы по коэффициенту отражения

Точное значение $\epsilon$	Вещественная часть вычисленного значения $\epsilon$	Мнимая часть вычисленного значения $\epsilon$
0.55	0.45900992662947548	-0.12280206524506068
0.7	0.69999999998287532	9.152058318985066e-012
0.85	0.850000000000000053	-1.6268948349946126e-016
1.05	1.0499999999999998	2.0668902336131069e-016
1.2	1.20000000000000035	7.7309095676387241e-016
1.35	1.3499999999999635	-3.6810980114817023e-014
1.5	1.4999999924542475	-9.7168744229063529e-008

#### *Результаты расчета по коэффициенту прохождения*

Ниже представлен результат расчета эффективной диэлектрической проницаемости образца материала в волноводе итерационным методом по коэффициенту прохождения (рисунок 3). Образец материала представлял собой секцию волновода. Коэффициент прохождения рассчитывался аналитически по точному значению  $\epsilon$ . Параметры волновода  $a = 2,274$ ,  $b = 1,004$ ,  $c = 0,982$ ; точное значение  $\epsilon = 4,0$ , построена вещественная часть значения  $\epsilon$ , вычисленного итерационным методом, для 50 итераций.

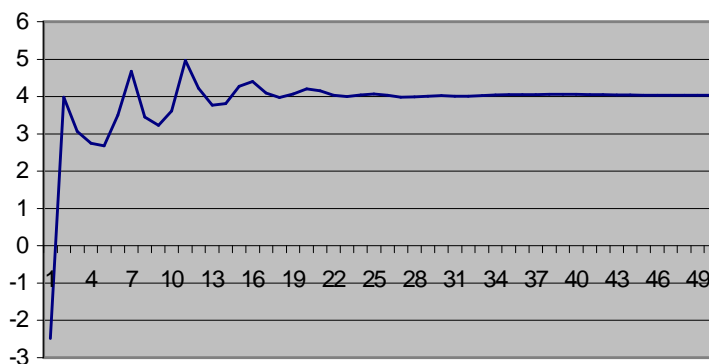


Рисунок 3 – Результаты расчета эффективной диэлектрической проницаемости по коэффициенту прохождения

Полученные в работе результаты демонстрируют хорошую сходимость итерационного метода.

В таблице 2 приведены результаты расчета для тела, представленного на рисунке 2.

Таблица 2 – Точные и вычисленные значения эффективной диэлектрической проницаемости для тела сложной геометрической формы по коэффициенту прохождения

Точное значение $\epsilon$	Вещественная часть вычисленного значения $\epsilon$	Мнимая часть вычисленного значения $\epsilon$
0.2	0.19960724506891891	$-3.2802392861383746e-005$
0.65	0.6499999999999998	$1.5276175298883627e-016$
1.1	1.1000000000000001	$1.2047801331189025e-016$
1.55	1.5499999999999952	$8.6855430664860411e-016$
2	1.9999999999999813	$2.6664462824394613e-015$
2.45	2.4500012177139232	$7.8248864452244952e-007$

В четвертой главе рассмотрены особенности вычисления матрицы проекционного метода на мини-кластере.

Результаты, полученные в четвертой главе, приведены в таблице 3 ( $nc$  – число процессорных ядер,  $np$  – число процессов,  $n$  – число членов ряда в формулах компонент функции Грина,  $m \times m \times m$  – размер сетки).

Таблица 3 – Время решения задачи нахождения матрицы (с) для разных  $np$  и  $n$  при  $m = 8$

$np$	8	16	32	64
$n = 15$	63	34	37	43
$n = 50$	529	255	266	269
$n = 100$	2126	1085	1072	1062
$n = 200$	8516	4383	4287	4269
$n = 500$	54405	28847	27994	28014

По результатам, приведенным в таблице 3, были построены графики (рисунок 4).

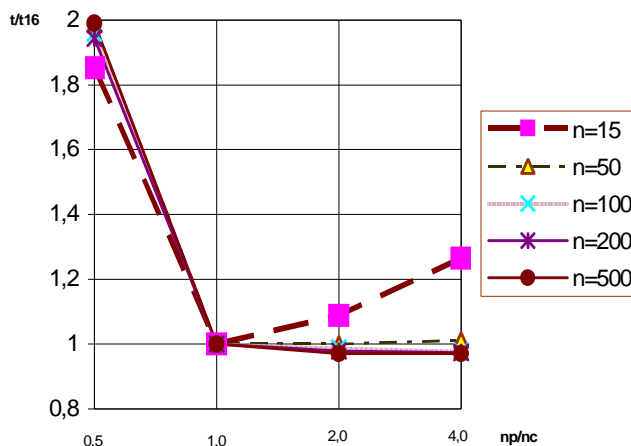


Рисунок 4 – Время решения для разных  $np$  и  $n$  при  $m = 8$

На рисунке 4 по горизонтальной оси приведены относительные значения  $np/nc$  – среднее число процессов на каждое процессорное ядро. По вертикальной оси представлено относительное время  $t/t_{16}$ , где  $t$  – время решения,  $t_{16}$  – время решения при  $np = 16$ . Увеличение времени при  $np < 16$  прогнозируемо и практически совпадает с ожидаемым значением, в этом случае используются не все процессорные ядра. При росте значения  $np$ , в частности при  $np = 64$ , когда на каждое процессорное ядро приходится в среднем около четырех процессов, можно было бы ожидать некоторого увеличения времени решения вследствие того, что при росте количества процессов должно увеличиваться время переключения между процессами. Однако, очевидно, влияние этого фактора мало. Более того, наблюдается даже некоторое уменьшение времени решения.

В **заключении** перечислены основные результаты исследования.

В **приложении** приведено формирование матрицы коэффициентов в проекционном методе.

## **ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ**

1. Предложена и обоснована корректная постановка обратной краевой задачи определения эффективной диэлектрической проницаемости неоднородного тела, помещенного в волновод, по коэффициенту прохождения или отражения. Доказаны теоремы о существовании и единственности решений обратной краевой задачи.

2. Предложен и обоснован итерационный метод для численного решения обратной задачи. Доказаны теоремы о сходимости метода.

3. Численный метод реализован в виде пакета программ на языке Си. Метод и программы тестированы на модельных задачах. Выполнены расчеты для ряда конкретных обратных задач для различных геометрических фигур с разными параметрами. Изучены особенности вычисления коэффициентов матрицы на мини-кластерах, найден эффективный способ расчета.

## **СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ**

### **Публикации в изданиях из перечня рецензируемых научных журналов, рекомендуемых ВАК**

1. Гурина (Гришина), Е. Е. Численное и аналитическое решение задачи дифракции электромагнитного поля на диэлектрическом параллелепипеде, расположенном в прямоугольном волноводе / Е. Е. Гурина (Гришина), М. Ю. Медведик, Ю. Г. Смирнов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2010. – № 2. – С. 44–53.

2. Гурина (Гришина), Е. Е. Численное и аналитическое решение задачи дифракции электромагнитного поля на двух секциях с разной диэлектрической проницаемостью, расположенных в прямоугольном волноводе / Е. Е. Гурина (Гришина), Е. Д. Деревянчук, М. Ю. Медведик, Ю. Г. Смирнов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2010. – № 4. – С. 73–81.



3. Гришина, Е. Е. Итерационный метод определения эффективной диэлектрической проницаемости неоднородного образца материала / Е. Е. Гришина, М. Ю. Медведик, Ю. Г. Смирнов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2011. – № 3. – С. 3–14.

4. Гришина, Е. Е. Численный метод решения обратной задачи восстановления эффективной диэлектрической проницаемости по коэффициенту отражения / Е. Е. Гришина // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2012. – № 2. – С. 76–85.

#### **Публикации в других изданиях**

5. Гришина, Е. Е. Особенности использования мини-кластера при расчете параметров наноматериалов / Е. Е. Гришина // Молодой ученый. – 2012. – № 9. – С. 45–50.

6. Grishina, Elena E. Reconstruction of complex effective permittivity of a nongomogenous body in rectangular waveguide using the iteration method / Elena E. Grishina, Yury G. Smirnov // Abstracts of International Conference Days On Diffraction, Saint Petersburg, Russia, May 28 – June 1, 2012. – Saint Petersburg, 2012. – P. 53.

7. Grishina, Elena E. Reconstruction of complex effective permittivity of a nongomogenous body of arbitrary shape in rectangular waveguide / Yury G. Smirnov, Mikhail Yu. Medvedik, Elena E. Grishina // PIERS Proceeding, Moscow, Russia, August 19–23, 2012. – Moscow, 2012. – P. 420–424.

8. Гришина, Е. Е. Спецпроцессор для решения задач определения диэлектрических и магнитных параметров материалов / Е. Е. Гришина, Е. И. Гурин // Новые информационные технологии и системы : тр. IX Междунар. науч.-техн. конф. – Пенза, 2010. – Ч. 1. – С. 169–176.

9. Гришина, Е. Е. Определение электродинамических параметров наноматериалов произвольной геометрической формы, расположенных в волноводе / Е. Е. Гришина // Надежность и качество – 2011 : тр. Междунар. симп. : в 2 т. – Пенза, 2011. – Т. II. – С. 130–132.

10. Гришина, Е. Е. Определение диэлектрической проницаемости неоднородного образца наноматериала с помощью итерационного метода / Е. Е. Гришина // Университетское образование : сб. ст. XV Междунар. науч.-метод. конф. – Пенза, 2011. – С. 250–253.

11. Гришина, Е. Е. Применение итерационного метода при определении электродинамических параметров наноматериалов / Е. Е. Гришина // Математическое и компьютерное моделирование естественнонаучных и социальных проблем : сб. ст. V Междунар. науч.-техн. конф. молодых специалистов, аспирантов и студентов. – Пенза, 2011. – С. 265–267.

12. Гришина, Е. Е. Построение вычислительных систем с использованием ПЛИС для решения задач математической физики / Е. Е. Гришина, Е. И. Гурин // Проблемы информатики в образовании, управлении, экономике и технике : сб. ст. XI Междунар. науч.-техн. конф. – Пенза, 2011. – С. 169–172.

Научное издание

**ГРИШИНА Елена Евгеньевна**

**МЕТОД НЕЛИНЕЙНОГО ОБЪЕМНОГО СИНГУЛЯРНОГО  
ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ  
РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ  
ЭФФЕКТИВНОЙ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ  
ПРОНИЦАЕМОСТИ ТЕЛА В ВОЛНОВОДЕ**

Специальность 05.13.18 – Математическое моделирование,  
численные методы и комплексы программ

Редактор *Е. П. Мухина*  
Технический редактор *С. В. Денисова*  
Компьютерная верстка *С. В. Денисовой*

Подписано в печать 18.03.2013.  
Формат 60×84/16. Усл. печ. л. 0,93  
Тираж 100. Заказ № 169.

---

Издательство ПГУ.  
440026, Пенза, Красная, 40.  
Тел./факс: (8412) 56-47-33; e-mail: [iic@pnzgu.ru](mailto:iic@pnzgu.ru)